

Rekenstrategieën van sterke en zwakke leerlingen bij optelsommen tot 20

Joke Torbeyns, Lieven Verschaffel & Pol Ghesquière

Inleiding

De laatste jaren is er - zowel in Nederland als in Vlaanderen - sprake van een belangrijke ontwikkeling binnen de elementaire wiskundededidactiek. Deze ontwikkeling wordt o.a. gekenmerkt door een grotere aandacht voor nieuwe wiskundige inhouden en doelen zoals "number sense" en schattend rekenen, handig of flexibel rekenen, toepassingsgericht rekenen, wiskundig probleemoplossen, samenwerkend wiskundeleren, functioneel gebruik van de zakrekenmachine, de motivationele en affectieve kant van het wiskundeleren, enz. Hierbij dient opgemerkt dat de vernieuwingsbeweging in Nederland en Vlaanderen andere accenten legt; simpel gezegd zou men kunnen stellen dat Vlaanderen minder ver gaat in de adoptie van het zgn. realistische gedachtegoed dan Nederland.

Hoewel de aandacht voor de bovengenoemde hogere orde doelen in de vernieuwingsbeweging onmiskenbaar is, betekent dit geenszins dat daarmee een aantal gevestigde algemeen erkende doelen en inhouden van het elementair wiskundeonderwijs overboord worden gegooid. Zo laten de vernieuwers er bijvoorbeeld geen twijfel over bestaan dat het verwerven van basisvaardigheden van het optellen en aftrekken tot 20 nog steeds de grote prioriteit blijft voor de aanvangsjaren van het formeel rekenonderwijs. Ik verwijs in dit verband naar het werk van de Dortmundse school o.l.v. E. Wittmann in Duitsland, en naar het

recente ontwikkelingsonderzoek van A. Treffers en J. Menne van het Nederlandse Freudenthal Instituut.

Een van de centrale actuele discussiepunten onder rekendidactici is of de nieuwe visie op en de nieuwe aanpak van het wiskundeonderwijs op de basisschool ook geschikt is voor de zwakke rekenaars uit het gewoon en het speciaal onderwijs, dan wel of deze doelgroep meer gebaat is bij een meer op mechanistische leest geschoeide rekendidactiek, die eerder neerkomt op het aanreiken en laten inoefenen van vaste oplossingsmethoden bij zorgvuldig geselecteerde en gerangschikte types rekensommen.

Het onderzoek dat ik vandaag kort zal presenteren, mede namens Joke Torbeyns en Pol Ghesquiere, richt zich op dat klassieke domein van het optellen en aftrekken tot 20. Meerbepaald gaan we in dit onderzoek op zoek naar de relatie tussen efficiënt en flexibel strategiegebruik en rekenvaardigheid bij Vlaamse leerlingen uit het regulier basisonderwijs na een jaar formeel rekenonderricht. We hopen hiermee bouwstenen aan te reiken voor de oplossing van de moeilijke maar belangrijke vraag of rekenzwakke leerlingen, in functie van hun specifieke kenmerken en noden, behoefte hebben aan een wezenlijk andersoortige vakdidactische aanpak dan hun sterke en normaalvorderende leeftijdsgenootjes.

Theoretische en methodologische achtergrond

In ons onderzoek maken we gebruik van het theoretisch kader van de ontwikkelingspsycholoog Siegler, die de cognitieve ontwikkeling in een bepaald gebied beschrijft aan de hand van 4 parameters. De eerste parameter betreft het repertorium aan beschikbare strategieën dat het subject toepast om een welbepaalde taak uit te voeren. De tweede parameter verwijst naar de relatieve frequentie waarmee de verschillende strategieën worden toegepast. De snelheid

en accuratesse waarmee elk van deze strategieën wordt uitgevoerd, vormt de derde parameter en de vierde parameter betreft de mate van flexibiliteit of adaptiviteit van de strategiekeuze.

Om een accuraat beeld te verwerven van de beschikbare strategieën, en met name van de adaptiviteit van individuele strategiekeuzen, adviseert Siegler om gebruik maken van de “choice/no-choice” methode. Deze methode komt neer op het aanbieden van de toetsitems in twee verschillende condities, nl. een vrije keuze conditie (“choice”), waarin de subjecten de opdracht krijgen om de items op te lossen met behulp van de strategie naar keuze, en één of meerdere geen keuze condities (“no-choice”), waarin zij dezelfde items moeten oplossen met behulp van een door de onderzoeker opgelegde strategie.

Onderzoeksopzet

Het onderzoek vond plaats in november 2000. Zevenenzeventig leerlingen uit het tweede leerjaar gewoon lager onderwijs in Vlaanderen, afkomstig uit drie willekeurig gekozen intacte klassen, namen deel aan het onderzoek. De leerlingen werden per klas ingedeeld in drie niveaugroepen - een sterke, een middelmatige en een zwakke groep - op basis van hun rapportcijfer voor wiskunde op het einde van het eerste leerjaar, aangevuld met het oordeel van hun leerkracht.

Op het ogenblik van de toetsafname was het oplossen van sommen met brug over 10 reeds ruimschoots aan bod gekomen, zowel in het eerste als in het tweede leerjaar. Bij de behandeling van dit curriculumonderdeel hadden de leerkrachten - zoals in de overgrote meerderheid van de Vlaamse scholen - sterk de nadruk gelegd op het gebruik van de strategie “aanvullen tot 10”, verderop de splitsstrategie genoemd, terwijl ze het gebruik van andere handige

rekenstrategieën, zoals bijvoorbeeld de strategie van het werken met een gekende dubbelsom, die in de meeste Nederlandse methoden expliciet onderwezen wordt naast de splitsstrategie, volledig naar het achterplan hadden geschoven.

De toets bestond uit 25 sommen tot 20: 20 experimentele sommen met brug over 10 en vijf eenvoudige optelsommen tot 10 (bufferitems). De 20 experimentele items vielen uiteen in vier typen, waarvan er telkens vijf sommen werden aangeboden.

- sommen met een grote eerste en een kleine tweede term in de opgave (vb.: $8 + 3 = .$).
- sommen met een kleine eerste en een grote tweede term in de opgave (vb.: $3 + 8 = .$), die sterk appel doen op het gebruik van de omkeerregel
- Dubbel-sommen (vb.: $6 + 6 = .$)
- Bijna-dubbelsommen (vb.: $6 + 7 = .$)

De aanbidding van de sommen geschiedde individueel en computergestuurd. De computer registreerde automatisch het antwoord van elk kind op iedere som en de reactietijd.

Alle leerlingen losten de sommen op in drie verschillende condities, namelijk de vrije keuze conditie, de splitsen verplicht conditie en de “retrieval” verplicht conditie.

- In de vrije keuze conditie kregen de kinderen de opdracht de sommen snel en accuraat op te lossen met behulp van die strategie die hen daartoe het meest geschikt leek. Na elke som werd gevraagd hoe zij die hadden aangepakt.
- In de tweede conditie, de splitsen verplicht conditie, werden de kinderen verplicht alle sommen op te lossen met behulp van de splitsstrategie.

- In de derde conditie, de “retrieval” verplicht conditie, werd de maximaal toegestane oplossings tijd gereduceerd tot 2 seconden, hetgeen het voor de kinderen vrijwel onmogelijk maakte een andere dan de “retrieval”-strategie te gebruiken om de sommen te beantwoorden.

Bij de analyse van de gehanteerde strategieën in de vrije conditie maakten we gebruik van een classificatieschema, waarin drie niveaus worden onderscheiden:

1. Retrieval, waarbij de uitkomst van de som meteen uit het geheugen wordt opgediept;
2. Rekenen, waarbij de uitkomst gevonden worden door de som te herstructureren in meerdere gekende sommen (zoals bij de splitsstrategie)
3. Tellen, waarbij de som geheel of gedeeltelijk al tellend wordt opgelost.

Naast deze drie niveaus in strategiegebruik, onderscheidde we voor wat de rekenstrategieën betreft twee typische vormen van handig strategiegebruik, waarvan de eerste wel en de tweede niet systematisch aan bod komt in de (meeste) Vlaamse rekenmethoden:

1. Het toepassen van de omkeerregel, Bijvoorbeeld: bij aanbod van de som $3 + 8 = .$, herstructureert het kind de opgave eerst tot $8 + 3 = .$,
2. Het gebruik van de strategie van de dubbelen ($6 + 7$ via $6 + 6 + 1$).

Onderzoeksresultaten

De resultaten worden weergegeven in drie delen. Eerst beschrijf ik kort de aard en de frequentie van de strategieën die de kinderen gebruikten om de 20 sommen met brug over 10 in de vrije keuze conditie te beantwoorden. In het tweede deel staan de accuratesse en de snelheid van strategie-uitvoering in de vrije keuze conditie centraal. In het derde deel ga ik in op de adaptiviteit van het strategiegebruik; daarvoor maak ik gebruik van de gegevens uit de drie verschillende condities.

Aard en frequentie van strategiegebruik

Deze eerste grafiek beschrijft de relatieve frequentie waarmee de kinderen uit de drie niveaugroepen gebruik maakten van “retrieval”, van rekenen, en van tellen om de 20 sommen met brug over 10 in de vrije keuze conditie te beantwoorden. Daaruit blijkt vooreerst dat de drie niveaugroepen maakten gebruik van de drie soorten strategieën.

Ten tweede pasten de kinderen deze drie soorten strategieën niet alle even frequent toe: ze hadden over het algemeen een sterke voorkeur voor rekenstrategieën, en van de overige twee verkozen ze retrieval boven tellen.

Ten derde blijkt daaruit dat de frequentie van strategiegebruik nauw samenhangt met het vaardigheidsniveau van de kinderen: leerlingen met een sterkere rekenvaardigheid maakten frequenter gebruik van retrieval en telden minder vaak dan leerlingen met een zwakkere rekenvaardigheid.

Tenslotte stelden we vast - en dat ziet u op de volgende slide - dat de frequentie van strategiegebruik ook sterk verschilde in functie van het aangeboden somtype, met als meest opvallend resultaat dat dubbelsommen veel meer retrieval uitlokten dan de drie andere soorten items.

Wat het gebruik van de twee handige strategieën betreft, stelden we vast dat omkeren relatief frequent, en het werken met dubbelen relatief zelden werd toegepast. In tegenstelling tot onze verwachting, werden deze twee handige strategieën niet frequenter toegepast door de sterke leerlingen dan door de zwakke. Tenslotte kwamen de beide handige strategieën vooral voor bij die opgaventypes die er het meest appel op doen: sommen met een kleine eerste en een grote tweede term werden, zoals verwacht, veel vaker opgelost via de omkeerregel dan de overige sommen, terwijl het vooral de bijna-dubbelsommen waren die het werken met dubbelen uitlokten.

Accuratesse van strategie-uitvoering

De volgende grafiek beschrijft de accuratesse waarmee de kinderen uit de drie niveaugroepen de drie soorten strategieën (retrieval, rekenen en tellen) uitvoerden in de vrije keuze conditie.

Daaruit blijkt eerst en vooral dat de kinderen de verschillende strategieën niet even accuraat uitvoerden. Zij gingen accurater tewerk bij gebruik van een retrieval- en rekenstrategie dan bij gebruik van een telstrategie. Dus: wanneer de kinderen zelf beslisten om een som via retrieval of via een rekenstrategie aan te pakken, dan leidde dat bijna altijd tot een juist antwoord.

Ten tweede, de drie niveaugroepen voerden de verschillende strategieën even accuraat uit.

Verder observeerden we duidelijke verschillen in de accuratesse van strategie-uitvoering tussen de onderscheiden somtypen, zoals op de volgende slide te zien is: het tellend oplossen van de sommen met de kleinste term achteraan verliep bijvoorbeeld veel accurater dan het tellend oplossen met de kleinste term vooraan.

Snelheid van strategie-uitvoering

De volgende grafiek beschrijft per groep en per somtype de snelheid waarmee de kinderen strategieën op de drie niveaus van strategiegebruik uitvoerden in de vrije keuze conditie.

Ten eerste blijkt hieruit dat de kinderen de verschillende strategieën niet even snel uitvoerden in de vrije keuze conditie. Zoals verwacht, was retrieval de snelste strategie en was de gemiddelde reactietijd bij rekenstrategieën korter dan wanneer er geteld werd.

Ten tweede, net zoals bij accuratesse, vonden we geen verschil in de snelheid van strategie-uitvoering tussen de drie vaardigheidsniveaus.

Tenslotte - en dat zien we weerom op de volgende slide - observeerden we duidelijke verschillen in de snelheid van strategie-uitvoering tussen de

onderscheiden somtypen: het uitrekenen en uittellen van sommen met een kleine term ($8 + 3$ en $3 + 8$) verliep veel sneller dan het uitrekenen of uittellen van sommen met een grote term ($6 + 6$ en $6 + 7$).

Adaptiviteit van strategiekeuzen op groepsniveau

Om een beeld te verwerven van de mate van adaptiviteit van strategiekeuzen op groepsniveau hebben we in een eerste stap de accuratesse en snelheid van de antwoorden van de kinderen bij de verschillende somtypen in de drie condities systematisch met elkaar vergeleken. Voor accuratesse konden we daarvoor gebruik maken van de gegevens uit de drie condities, terwijl we ons voor de snelheid uiteraard dienden te beperken tot de vergelijking van de gegevens uit de eerste twee condities. De volgende tabel beschrijft de accuratesse en de snelheid waarmee de leerlingen de onderscheiden somtypen beantwoordden in de vrije keuze, de splitsen verplicht en de “retrieval” verplicht conditie. Voor de eenvoud heb ik de gegevens niet uitgesplitst per niveaugroep.

Het zou me te ver voeren alle evidentie voor het adaptieve karakter van de strategiekeuzen in de vrije keuze conditie dat uit deze tabel naar voren komt, in detail te bespreken. Ik beperk me tot drie manifeste aanwijzingen daarvoor.

Een eerste aanwijzing is dat de leerlingen over het algemeen veel sneller antwoordden in de vrije keuze conditie dan in de splitsen verplicht conditie, zonder dat dit resulteerde in slechtere prestaties.

Ten tweede, sommen die zich lenen tot het gebruik van een handige rekenstrategie (zoals $3+8$ sommen), werden niet enkel sneller maar ook vaker correct beantwoord wanneer de kinderen de kans kregen zelf een oplossingsstrategie te kiezen dan wanneer ze werden verplicht de splitsstrategie toe te passen.

Als derde aanwijzing voor de adaptiviteit van de strategiekeuzen in de vrije keuze conditie vermeld ik het scherpe contrast tussen de geringe accuratesse

waarmee de kinderen de sommen met brug over 10 beantwoordden in de retrieval verplicht conditie, en de grote accuratesse waarmee diezelfde kinderen retrieval toepasten bij het beantwoorden van deze sommen in de vrije keuze conditie.

Vermeldenswaard is tenslotte dat we deze drie aanwijzingen voor het adaptief karakter van het strategiegebruik ook teruggevonden hebben in de drie afzonderlijke niveaugroepen, dus ook in de zwakste groep.

Adaptiviteit van strategiekeuzen op individueel niveau

Om de mate van adaptiviteit van strategiekeuzen in de vrije keuze conditie voor elk kind nog nauwkeuriger te schatten, hebben we per kind de strategiekeuzen in de vrije keuze conditie vergeleken met hun prestaties in de geen keuze condities. Het zou me te ver voeren om het algoritme dat we gebruikten om te beslissen of een individuele strategiekeuze bij een bepaalde som in de vrije keuze conditie als al dan niet adaptief noemen uitvoerig toe te lichten, maar de kern ervan is dat een strategie in de vrije keuze conditie als adaptief werd gescoord indien zij zich minstens op hetzelfde niveau van verkorting situeerde als het hoogste niveau waarop de betreffende leerling deze som kon oplossen blijkens zijn prestaties in de twee geen keuze condities.

Concreter uitgedrukt: wanneer een leerling de som $8 + 4 = .$ in de retrieval verplicht conditie correct had opgelost binnen de 2 seconden, en diezelfde som in de vrije keuze conditie ook via retrieval had opgelost, dan werd zijn strategiegebruik voor die som als adaptief gescoord, terwijl het strategiegebruik van een leerling die de som $8 + 4 = .$ in de retrieval verplicht conditie correct had opgelost, maar diezelfde som in de vrije keuze conditie op een lager niveau had opgelost, voor deze opgave als niet-adaptief werd gescoord.

Gebruikmakend van dit algoritme, vonden we dat de kinderen in de vrije keuze conditie in het algemeen meer adaptieve dan niet-adaptieve strategiekeuzen maakten.

We observeerden daarnaast een significant verschil in de mate van adaptiviteit van strategiekeuzen tussen leerlingen met een verschillend rekenvaardigheidsniveau. De sterke leerlingen maakten in de vrije keuze conditie meer adaptieve strategiekeuzen dan de leerlingen uit de middengroep, die op hun beurt meer adaptieve strategiekeuzen dan de zwakke leerlingen.

De voornaamste oorzaak van de lagere adaptiviteitscore in de laatste groep was dat zij sommen die ze blijkens hun prestatie in de splitsen verplicht conditie reeds accuraat konden oplossen via de splitsstrategie, in de vrije keuze conditie regelmatig oplosten via een meer primitieve telstrategie.

Conclusies en discussie

Tot zover een kort verslag van de voornaamste resultaten van de eerste deelstudie uit het promotieonderzoek van Joke Torbeyns (waarin de strategieën die sterke en zwakke 6-7-jarigen gebruiken om sommen met brug over 10 op te lossen vergeleken werden gebruikmakend van Siegler's theoretisch model van "strategic change" en van de door hem voorgestelde "choice no-choice methode").

Wanneer we de resultaten tot slot nog even bekijken vanuit het perspectief van de zwakkere rekenaars, dan leiden zij tot de volgende conclusies.

- Na een jaar formeel rekenonderricht in het oplossen van optellingen met brug over 10 zijn de meeste leerlingen, ook uit de zwakste niveaugroep, het tellen al grotendeels ontgroeid en hebben zij reeds een grote stap gezet in de richting van de verkorting en internalisering van hun strategieën, maar is het eindpunt daarvan nog zeker niet bereikt. In vergelijking met wat hierover bekend is in de internationale literatuur, zijn deze resultaten erg positief.
- Het verschil tussen de zwakke en de sterke leerlingen is niet dat ze andere strategieën gebruiken, noch dat zij de strategieën waar ze spontaan naar teruggrijpen minder goed beheersen dan de andere leerlingen, maar dit

verschil heeft vooral te maken met de frequentie waarmee zij de verschillende strategieën toepassen en met de adaptiviteit waarmee ze dat doen. Sterke leerlingen grijpen sneller en vaker naar de meest verkorte strategieën en weten blijkbaar ook beter bij welke som ze welke strategie het best toepassen. In die zin vormen onze gegevens de bevestiging van de resultaten van vroeger empirisch onderzoek, nl. dat zwakke kinderen meer moeite hebben met automatiseren, maar ook dat ze minder flexibele rekenaars zijn.

Wanneer we onze gegevens terugkoppelen naar de uitgangsvraag, dan is het niet zo dat onze data steun bieden aan de stelling dat de ontwikkeling van rekenzwakke kinderen zich wezenlijk anders voltrekt bij sterke leerlingen. Maar men mag daarbij niet uit het oog verliezen dat de zwakke leerlingen uit dit onderzoek uit het regulier basisonderwijs afkomstig waren, en dus geen kinderen met manifeste rekenproblemen. Daarom is voor volgend jaar een onderzoek gepland waarin we het onderzoek zullen repliceren bij een of meerdere groepen van kinderen met rekenmoeilijkheden.

.